

# 計算パズル集

2013.04.18 初版提出

2013.04.25 訂正版

## 問題 1 : 小町算の表現法の分布

省略。

## 問題 2 : 単位分数表現

省略。

## 問題 3 : ナルシステック数

途中省略。

N=18 までの検索時間 0.8 秒

\*\* N=18 までは、64bit 整数演算で求めることができる。

N=19 以降を求めるには多倍長演算が必要

( 時間があつたので、N=61 まで探索を実施。結果は別紙 3-2 )

### 3) 解法について

$a_i$  ( $i=0\sim n$ ) を  $0\sim 9$  までの整数として、 $f(n)$ ,  $g(n)$  を以下のように定義する。

$$f(n) = a_0 + a_1 * 10 + a_2 * 10^2 + \dots + a_n * 10^n \quad \text{---- (1)}$$

$$g(n) = a_0^n + a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n \quad \text{---- (2)}$$

ナルシステック数とは、 $f(n) = g(n)$ となる数と定義される。

$0\sim 9$ の数字の中から重複を許して、 $n$ 個の整数を選択する。 $0$ を $h_0$ 個、 $1$ を $h_1$ 個、 $\dots$  $9$ を $h_9$ 個とすると、これらの数字の並びには関係なく  $g(n)$  を計算することができる。( $f(n)$  は順序が決まらなると計算不可) (2)式で  $0\sim 9$ の数字の重複をまとめると (3)式となる。

$$g(n) = h_0 * 0 + h_1 * 1 + h_2 * 2^n + \dots + h_9 * 9^n \quad \text{---- (3)}$$

$g(n)$  を求めることができると、 $f(n) = g(n)$ により  $f(n)$  が決まる。 $f(n)$  が決まれば、 $a_0 = f(n) \% 10$ により  $a_0$  が求まる。 $a_1\sim a_n$ も同様に求めることができる。さて、 $a_0\sim a_n$  は、ナルシステック数と仮定して求めたものであるから、ナルシステック数である保証はない(可能性があるだけ)。その保証をとるためには、 $0\sim 9$ の数字の重複数が、 $h_0, h_1, \dots, h_9$  と一致していればよい。

### 【枝刈】

上記の探索を効率よく行うために、 $g(n)$  が最小値、最大値の範囲を超えると予測できた場合は、それ以降の探索をスキップする処理を追加した。現時点(N=18 程度)ではあまり効果はないが、N が

大きくなればある程度の効果が期待できると思われる。

#### 【多倍長整数演算】

64 ビット整数の上限は、 $1.8 \times 10^{19}$  であるため、 $N=18$  が限界となる。この範囲ではあまり時間を要せず、求めることができた。(  $N=19$  以降は、多倍長整数演算の論理が必要となるので、見送ることとする。 )

今回の探索結果をみると、 $N$  が 1 ケタ増えると、探索時間は 1.5 倍になっている。仮に 2 倍ペースで増加すると仮定すると、 $N=30$  では 4096 倍 x 数秒と予測できる。( 高々、半日程度 )

本方式の限界はこのあたりと考えられる。

補足：この予測は大幅に修正が必要となった。原因は  $N$  が大きい場合に枝刈の効果が極めて大きく、探索時間は大幅に短縮できたためである。(  $N=1\sim61$  の探索は完了した )

補足 2：単精度と多倍長整数演算の性能を  $N=18$  で比較すると、約 17 倍の差がある。

$N=18$ の探索時間	単精度(64bit)	296 msec
	多倍長整数演算	5117 msec

#### 【上限値】

(3)式より、 $\max(G(N)) = N \cdot 9^N (=H(N))$  となることがわかる。もし、 $\max(G(N))$  が  $N$  ケタ未満となれば、もはや、ナルシステック数は存在しえない。実際に  $N=61$  では、 $H(N) = 0.98E+60$  となり、ナルシステック数は存在しないことになる。さらに、 $H(N+1) = \{(N+1) / N \cdot 9\} \cdot H(N)$  であるから、 $N \geq 61$  では  $H(N)$  が  $N$  ケタ未満であれば、 $H(N+1)$  も  $(N+1)$  ケタ未満となる。従って、 $N \geq 62$  以降も存在しないことがいえる。(教材では最大 58 ケタとなっているのは、さらなる深い分析による結果と判断する)

#### 4) 多倍長整数演算による探索結果 ( 時間があつたので追加 )

上記のように、ナルシステック数の上限は、簡単な計算では  $N=61$  となっている。

探索処理の整数演算を多倍長演算に変更して探索を行った結果、以下のことが判明した。

(  $N=1\sim61$  の探索結果の詳細は、別紙 3-2 を参照 )

##### (a) $N=40$ 以降の ナルシステック数は存在しない

最大値は、以下の  $N=39$  のナルシステック数である。(教材と同じ)

115132219018763992565095597973971522401

(b) 探索時間は、約 5H 程度。このように短時間で完了した主な要因は、 $N$  が大きな場合に枝刈が極めて有効に働いたためである。

#### 【Wikipedia のナルシスト数の記述】

**ナルシスト数は(0を含めないならば)全部で 87 個存在し、その最大のものは 39 桁の数**

115132219018763992565095597973971522401

である。

#### 問題4：スターリング公式

出力結果の詳細は、別紙4を参照。

##### 1) 結論

「Nを10倍してようやく精度が1ケタ向上する」という極めて精度の低い近似式である。

##### 2) 解法について

スターリングの公式をnの関数とみて、f(N)とする。

$$f(x) = \frac{n! * e^x}{\sqrt{2\pi n * n^n}}$$

f(N) をそのまま計算しては、すぐに floating overflow/underflow となることが予想される。

そこで、以下のように変形したものを f1(n) とする。

$$f1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \prod_{k=1}^{k=n} (k * e/n)$$

しかし、f1(n) は、n=1000 までは計算できたが、n=10000 では overflow となった。

そこで、積の計算を両端から行うように変形した f2(n)を計算するように変更したが、今度は underflow となり、やはり計算不能となった。

f1(n)の計算で判明したことは、Nを10倍にしてようやく精度は1ケタよくなるという結果である。数値計算の観点からは非常に精度の悪い近似式といえる。

さらに精度を上げるためには、スケーリングに応じて乗除算を行う方式や高精度計算を行うことも考えられるが、さらに簡単な別のアプローチをとることにした。f(n) を直接計算するのではなく、 $g(n)=\log(f(n))$  を計算して、その結果から逆に  $f(n)=\exp(g(n))$  により、f(n) を求める。具体的には、g(n) は以下の式となり、overflow/underflow の心配がない。(簡単な式の変換なので結果のみとする)

$$g(n) = n + \sum_{k=1}^n \log k - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - \frac{1}{2} \log 2\pi$$

##### 【誤差について】

f(n) は1に収束していくので、g(n) は0に収束していくことになる。

さて、g(n) の誤差を x とすると f(n) の誤差はどうなるであろうか?

一般に、 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ ,  $-\infty < x < \infty$  であるから、 $x=0$ の近傍では、 $e^x \approx 1+x$ となる。従って、 $f(n) = \exp(g(n))$  と  $g(n)$  の誤差はほぼ同じと考えてよい。

(この結果は実測値とよく一致している)

補足

- 1) Nは10倍にして精度が1ケタ上がるという経験則は、 $g(n)$ でも継承されている。  
(逆に、良くならないともいえる)
- 2)  $g(n)$ を使った計算では、 $N=10000000$ まで求めたが、 $N=1000000$ 以降は精度が悪化している。その原因は、 $\sum_{k=1}^n \log k$ の計算における累積誤差と推測している。  
( $\log x$ の高精度関数も含めた対策が必須となる)

### 【 $\sum_{k=1}^n \log k$ の累積誤差への対策】 2013.04.21 追記

$\log$ の誤差が累積する問題の対策として、 $\sum_{k=1}^n \log k$ を別の形式で表現できないかを検討した。

$\delta(n) = \log n - \int_{n-1/2}^{n+1/2} \log x dx$  とする。また、積分を明に記述すると

$\delta(n) = \log n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(n + \frac{1}{2}\right) + \left(n - \frac{1}{2}\right) \log\left(n - \frac{1}{2}\right) - 1$  となる。

$\delta(n)$ を使って、 $g(n)$ を書き換えると

$$g(n) = \sum_{k=1}^n \delta(k) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \log \pi \quad \text{となる(途中略)}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $g(n) \rightarrow 0$ ,  $\left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \rightarrow 1/2$ , となるので、

$\sum_{k=1}^n \delta(k) \rightarrow \frac{1}{2} (\log \pi - 1)$  ( $= \delta_0$ とする)に収束する筈である。 $\delta_0$ を使って、 $g(n)$ を再度書き換えると

$$\begin{aligned} g(n) &= \delta_0 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta(k) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \log \pi \\ &= - \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta(k) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

一方、 $\delta(n)$ は、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \delta(n) &= \log n - \int_{n-1/2}^{n+1/2} \log x dx \\ &= -n \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right\} - 1 - \frac{1}{2} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right\} \end{aligned}$$

$x = 1/2n$ として、 $\log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ , (ただし、 $0 \leq x < 1$ )により、 $\log$ を展開すると

$$\delta(n) = \frac{1}{2 \cdot 3} x^2 + \frac{1}{4 \cdot 5} x^4 + \frac{1}{6 \cdot 7} x^6 + \dots$$

これより、 $\delta(n) \sim \frac{1}{6} x^2 = \frac{1}{24n^2}$ ,  $\sum_n \delta(n) \sim \frac{1}{24(n-1)}$ の近似式が得られる。従って、

$$g(n) \sim g_2(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{24n}$$

また、 $\left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \dots \right\}$ で近似すると

$$g(n) \sim g_0(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \dots \right\} - \frac{1}{2} - \frac{1}{24n}$$

【実験結果】

N	g(N)	g2(N)	g0(N)	e = exp(g0(N))
1	0.0810614667953	0.0665309954956	0.0208333333333	1.0210518621451
10	0.0083305634334	0.0081300571124	0.0077083333333	1.0077381190182
100	0.0008333305557	0.0008312551927	0.0008270833333	1.0008274254611
1000	0.0000833333388	0.0000833125052	0.0000832708333	1.0000832743004
10000	0.0000083331197	0.0000083331261	0.0000083327083	1.0000083327431
100000	0.0000008302396	0.0000008333345	0.000000833271	1.000000833274
1000000	-0.0000001907228	0.0000000834032	0.0000000833333	1.0000000833333
10000000	-0.0000012375294	0.0000000075150	0.0000000083333	1.0000000083333
100000000	-0.0000068105637	-0.0000000022054	0.0000000008333	1.0000000008333
1000000000	-0.0003327287613	0.0000000414535	0.0000000000833	1.0000000000833

- g(N) の限界は N=100000、g2(N) の限界は、N=10000000~100000000
- g0(N) は限界なし。N=1000000000 まで順調に減少している。

以上