

平方根計算法

2013.04.25 初版

問題 1 : めのこ平方(改良)

省略。

問題 2 : 漸化式 2 (解析)

省略。

問題 3 : ニュートン法 (解析)

$$\begin{aligned}x[n+1] - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left(x[n] + \frac{a}{x[n]} \right) - \sqrt{a} \\&= \frac{1}{2x[n]} (x[n]^2 - 2\sqrt{a}x[n] + a) \\&= \frac{1}{2x[n]} (x[n] - \sqrt{a})^2\end{aligned}$$

$$|x[n+1] - \sqrt{a}| \sim \frac{1}{2\sqrt{a}} |x[n] - \sqrt{a}|^2$$

【考察】 3 次のオーダーで収束する平方根の漸化式

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{a})^3 &= 0 \\x^3 - 3\sqrt{a}x^2 + 3ax - a\sqrt{a} &= 0 \\\sqrt{a}(3x^2 + a) &= x^3 + 3ax \\\sqrt{a} &= \frac{(x^3 + 3ax)}{(3x^2 + a)}\end{aligned}$$

$$\rightarrow x[n+1] = (x[n]^3 + 3ax) / (3x^2 + a)$$

実験結果

【o(3)の新漸化式】

=== 2.000000 by X[n+1] = (X[n]**3 + 3*A*X[n]/(A + 3*X[n]**2)) ===

初期値 1.000000

1 y = 1.3999999999999999 e = 0.04000000000000003

2 y = 1.4142131979695431 e = 0.0000010306887577

3 y = 1.4142135623730951 e = -0.00000000000000004

【o(2)のニュートン法】

```

=== 2.000000 by X[n+1] = (X[n] + A/X[n]) / 2 ===
初期値 1.000000
1 y = 1.5000000000000000 e = -0.2500000000000000
2 y = 1.4166666666666665 e = -0.0069444444444444
3 y = 1.4142156862745097 e = -0.0000060073048824
4 y = 1.4142135623746899 e = -0.0000000000045106
5 y = 1.4142135623730949 e = 0.0000000000000004

```

従来のニュートン法より速い収束が確認できた。

【考察2】 立方根の漸化式

(1) ニュートン法による漸化式 (o(2)の漸化式)

$$x[n+1] = \frac{1}{3} (2x[n] + a/x[n]^2)$$

(2) 立方根の o(3) の漸化式

$$x[n+1] = \frac{1}{2} (x[n] + 3ax[n]/(2x[n]^3 + a))$$

(3) 上記の漸化式の導出

$$(x - A)^3 (x + A) = 0$$

これを展開すると $x^4 - 2Ax^3 + 2A^3x - A^4 = 0$ となる。

さらに、変形すると

$$A = (x^4 + 2A^3x) / (2x^3 + A^3)$$

上記の式を、 $A = x[n+1]$, $x = x[n]$, $A^3 = a$ で置換すると

$$x[n+1] = (x[n]^4 + 2ax[n]) / (2x[n]^3 + a)$$

がえられる。これを整理したものが、(2) の漸化式である。

(4) 実験結果

詳細は別紙2を参照されたい。

【o(3)の新漸化式】

```

=== 8.000000 by X[n+1] = (X[n] + 3*A*X[n]/(A + 2*X[n]**3)) / 2 ===
初期値 1.000000
1 y = 1.7000000000000000 e = 3.0870000000000006
2 y = 1.9943958263211039 e = 0.0670618195799664
3 y = 1.9999999705416462 e = 0.0000003535002397
4 y = 2.0000000000000000 e = 0.0000000000000000

```

【o(2)のニュートン法】

```

=== 8.000000 by X[n+1] = (2*X[n] + A/X[n]**2) / 3 ===
初期値 1.000000
1 y = 3.3333333333333335 e = -29.0370370370370450
2 y = 2.4622222222222221 e = -6.9273164554183797

```

3	y =	2.0813412476715789	e =	-1.0163315496105625
4	y =	2.0031374991412871	e =	-0.0377090839858454
5	y =	2.0000049116755041	e =	-0.0000589402507973
6	y =	2.0000000000120619	e =	-0.0000000001447429
7	y =	2.0000000000000000	e =	0.0000000000000000

新しい漸化式が良い近似となっている。また、ニュートン法(2次関数近似)でも $o(3)$ の近似式は得られるが、その場合、平方根演算が必要であること、初期値によっては解が虚数になることなどの課題があり、新近似式も魅力的な選択枝である。

問題4：ニュートン法（2次関数近似）

途中略。

3) 実行結果

8.0

```
8.000000 の立方根  初期値  x1 =  1.00  eps = 1.00e-010
n                  近似値          関数値
1      2.1072751268321590      1.3575837561071946
2      1.9998968211221224      -0.0012380826603451
3      2.00000000000000919      0.0000000000011031
根：2.000000
```

512

```
512.000000 の立方根  初期値  x1 =  1.00  eps = 1.00e-010
n                  近似値          関数値
1      13.5607554656433770      1981.7427697802323000
      degrade : (b1,b2,b3) =  40.68, -551.68, 1981.74  D=-18133.83
2      9.9685740770279452      478.6018197315385100
3      7.9574049688325932      -8.1347791855458809
4      8.0000004025203886      0.0000772839184719
5      8.0000000000000000      0.0000000000000000
根：8.000000
```

【考察】

① 2次関数近似では平方根の計算が発生するが、初期値によっては虚数となることもある。

(512の立方根を初期値1からはじめるとその現象があらわれる)

その対策として、初期値を適切な値から開始すれば良さそうであるが、それを予測するのは一般には困難である。従って、別のアプローチをとる。2次関数近似が失敗した場合、一時的に1次関数近似に degrade して、処理を継続することにする。512の立方根の例ではうまく機能して、最終結果がえられた。しかし、このアプローチがどこまで有効かは未知数である。例えば、1次関数の係数が0に非常に近い場合は、これも破たんしてしまう。また、2次関数の係数 b_1 が0に非常に近い場合も同様に破たんしてしまう恐れがある。

② 平方根は2つの解をもたらすが、どちらの解を近似値として採用すべきか?

関数の形状が明らかで、初期値がどの位置で開始すべきかが判る場合は、次の近似値の選択に問題はないが、そうでない場合は $f(x_1), f'(x_1), f''(x_1)$ の値から判断すべきであろう。

	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	次の近似値
case0	+	+	+	+ の根
case1	+	+	-	- の根
case2	+	-	+	- の根
case3	+	-	-	+ の根
case4	-	+	+	+ の根
case5	-	+	-	- の根
case6	-	-	+	- の根
case7	-	-	-	+ の根

この表によると、 $f(x_1)$ の値に関係なく、 $f'(x_1) * f''(x_1) > 0$ のとき+の根、 $f'(x_1) * f''(x_1) < 0$ のとき-の根を採用することになる。

以上