

平方根計算法

2013.05.02 追加版

前回、平方根、立方根について、**o(3)**の漸化式が作れることを示し、数値実験にて検証した。
今回、そのアプローチを**n次方程式の根の漸化式に一般化**することができた。

問題3：ニュートン法（解析）

$$\begin{aligned}x[n+1] - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left(x[n] + \frac{a}{x[n]} \right) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x[n]} (x[n]^2 - 2\sqrt{a}x[n] + a) \\ &= \frac{1}{2x[n]} (x[n] - \sqrt{a})^2\end{aligned}$$

$$|x[n+1] - \sqrt{a}| \sim \frac{1}{2\sqrt{a}} |x[n] - \sqrt{a}|^2$$

【考察】 3次のオーダーで収束する平方根の漸化式

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{a})^3 &= 0 \\ x^3 - 3\sqrt{a}x^2 + 3ax - a\sqrt{a} &= 0 \\ \sqrt{a}(3x^2 + a) &= x^3 + 3ax \\ \sqrt{a} &= \frac{(x^3 + 3ax)}{(3x^2 + a)}\end{aligned}$$

$$\rightarrow x[n+1] = (x[n]^3 + 3ax) / (3x^2 + a)$$

実験結果

【o(3)の新漸化式】

```
=== 2.000000 by X[n+1] = (X[n]**3 + 3*A*X[n]/(A + 3*X[n]**2)) ===
初期値 1.000000
1 y = 1.3999999999999999 e = 0.040000000000000003
2 y = 1.4142131979695431 e = 0.0000010306887577
3 y = 1.4142135623730951 e = -0.000000000000000004
```

【o(2)のニュートン法】

```
=== 2.000000 by X[n+1] = (X[n] + A/X[n]) / 2 ===
初期値 1.000000
1 y = 1.5000000000000000 e = -0.25000000000000000
2 y = 1.4166666666666665 e = -0.00694444444444442
3 y = 1.4142156862745097 e = -0.0000060073048824
```

4 y = 1.4142135623746899 e = -0.0000000000045106
 5 y = 1.4142135623730949 e = 0.0000000000000004

従来のニュートン法より速い収束が確認できた。

【考察2】 立方根の漸化式

(1) ニュートン法による漸化式 (o(2)の漸化式)

$$x[n+1] = \frac{1}{3} (2x[n] + a/x[n]^2)$$

(2) 立方根の o(3) の漸化式

$$x[n+1] = \frac{1}{2} (x[n] + 3ax[n]/(2x[n]^3 + a))$$

(3) 上記の漸化式の導出

$$(x - A)^3 (x + A) = 0$$

これを展開すると $x^4 - 2Ax^3 + 2A^3x - A^4 = 0$ となる。

さらに、変形すると

$$A = (x^4 + 2A^3x) / (2x^3 + A^3)$$

上記の式を、 $A = x[n+1]$, $x = x[n]$, $A^3 = a$ で置換すると

$$x[n+1] = (x[n]^4 + 2ax[n]) / (2x[n]^3 + a)$$

がえられる。これを整理したものが、(2) の漸化式である。

(4) 実験結果

詳細は別紙2を参照されたい。

【o(3)の新漸化式】

=== 8.000000 by X[n+1] = (X[n] + 3*A*X[n]/(A + 2*X[n]**3)) / 2 ===
 初期値 1.000000

1 y = 1.7000000000000000 e = 3.0870000000000006
 2 y = 1.9943958263211039 e = 0.0670618195799664
 3 y = 1.9999999705416462 e = 0.0000003535002397
 4 y = 2.0000000000000000 e = 0.0000000000000000

【o(2)のニュートン法】

=== 8.000000 by X[n+1] = (2*X[n] + A/X[n]**2) / 3 ===
 初期値 1.000000

1 y = 3.3333333333333335 e = -29.0370370370370450
 2 y = 2.4622222222222221 e = -6.9273164554183797
 3 y = 2.0813412476715789 e = -1.0163315496105625
 4 y = 2.0031374991412871 e = -0.0377090839858454
 5 y = 2.0000049116755041 e = -0.0000589402507973
 6 y = 2.000000000120619 e = -0.000000001447429
 7 y = 2.0000000000000000 e = 0.0000000000000000

新しい漸化式が良い近似となっている。また、ニュートン法(2次関数近似)でも $o(3)$ の近似式は得られるが、その場合、平方根演算が必要であること、初期値によっては解が虚数になることなどの課題があり、新近似式も魅力的な選択枝である。

番外：n次方程式の根を求める漸化式について

1) $X^{*3} - X + 1 = 0$ の根を求める漸化式

(a) ニュートン法 (一次関数近似) $o(2)$ の漸化式

$$X_{n+1} = \frac{2X_n^3 - 1}{3X_n^2 - 1}$$

(b) $o(3)$ の新漸化式

$$X_{n+1} = \frac{3X_n^5 + X_n^3 - 6X_n^2 + 1}{6X_n^4 - 3X_n^2 - 3X_n + 1} \dots \text{式(1)}$$

【実験結果】 詳細データは別紙4参照

(最良ケース)

=== by $X[n+1] = (2*X[n]**3 - 1)/(3*X[n]**2 - 1)$ <— ニュートン法

初期値 -1.000000

1	y = -1.5000000000000000	e = -0.8750000000000000
2	y = -1.3478260869565217	e = -0.1006821730911482
3	y = -1.3252003989509069	e = -0.0020583619166634
4	y = -1.3247181739990537	e = -0.0000009243777597
5	y = -1.3247179572447898	e = -0.0000000000001865
6	y = -1.3247179572447461	e = -0.0000000000000002

=== by $X[n+1] = (3*X[n]**5 + X[n]**3 - 6*X[n]**2 + 1)/(6*X[n]**4 - 3*X[n]**2 - 3*X[n] + 1)$

初期値 -1.000000

1	y = -1.2857142857142858	e = 0.1603498542274047
2	y = -1.3246776484679401	e = 0.0001718956825756
3	y = -1.3247179572447045	e = 0.0000000000001767
4	y = -1.3247179572447461	e = -0.0000000000000002

【初期値と収束傾向】

表1 収束(誤差 $1.0e-13$)までの繰り返し回数

初期値	ニュートン法	新漸化式	備考
1.0	21	5	
-1.0	6	4	最良の初期値

0.0	22	6	
0.577	28	28	$\approx 1/\sqrt{3}$
-0.577	30	13	$\approx -1/\sqrt{3}$

- ・新漸化式は、ほとんどのケースでニュートン法より収束が速い。(o(3)だから当然の結果)
初期値が $\approx \frac{1}{\sqrt{3}}$ では新漸化式も収束が悪い。微分は使っていないので関係ないと思っていたが、やはり、変曲点の近くは収束が悪くなるようだ。(原因は不明)
- ・ニュートン法は、初期値によっては収束が極めて悪くなるケースがある。初期値が根の近くでないと不安定となり効率が悪い。初期値の取り方に工夫が必要と思われる。

(c) 新漸化式の導出

$$f(x) = X^3 - X + 1 \quad (\text{求める方程式の左辺})$$

$$g(X) = (X-A)^3 (cX+A) \quad \dots \text{式 (2)}$$

ただし、A は $f(X) = 0$ の根とする。(ie. $A^3 - A + 1 = 0$)

とする。g(X) を展開すると、

$$g(X) = cX^4 + (1-3c)AX^3 + (3c-3)A^2X^2 + (3-c)A^3X - A^4$$

となる。さらに、 $A^3 - A + 1 = 0$ を使って、 A^3 、 A^4 を消しこみ、A について整理すると、

$$g(X) = \{(3c-3)X^2 - 1\}A^2 + \{(1-3c)X^3 + 1 + (3-c)X\}A + \{cX^4 + (c-3)X\}$$

ここで A^2 の項が 0 となるように c を決める。(即ち、 $c = 1 + \frac{1}{3X^2}$ とする) この c の値を使っ

て、g(X) を書き換えると

$$g(X) = \left(-2X^3 + X + 1 - \frac{1}{3X}\right)A + \frac{1}{3X}\{X^3 + 3X^5 + 1 - 6X^2\} \quad \dots \text{式 (3)}$$

となる。X が A に近いとき、 $g(X) \sim 0$ となるので、上記の右辺も

$$\left(-2X^3 + X + 1 - \frac{1}{3X}\right)A + \frac{1}{3X}\{X^3 + 3X^5 + 1 - 6X^2\} \sim 0$$

0 に近い値となる。即ち、

$$A \sim \frac{3X^5 + X^3 - 6X^2 + 1}{6X^4 - 3X^2 - 3X + 1} \quad \dots \text{式 (4)}$$

式 (4) を、 $A \rightarrow X_{n+1}$, $X \rightarrow X_n$ に置き換えることにより、式 (1) の漸化式が得られる。

(d) o(3)のオーダーで収束することの確認

$$\begin{aligned} X_{n+1} - A &= \frac{3X_n^5 + X_n^3 - 6X_n^2 + 1}{6X_n^4 - 3X_n^2 - 3X_n + 1} - A \\ &= \frac{3X_n^5 + X_n^3 - 6X_n^2 + 1 - A(6X_n^4 - 3X_n^2 - 3X_n + 1)}{6X_n^4 - 3X_n^2 - 3X_n + 1} \end{aligned}$$

この分子と式 (3) を較べると、明らかに $g(X_n)$ の $3X_n$ 倍であるから、g(X) の最初の定義に戻すことによって、

$$X_{n+1} - A = \frac{3 X_n (X_n - A)^3 (c X_n + A)}{(6 X_n^4 - 3 X_n^2 - 3 X_n + 1)} \quad \text{ただし、} c = 1 + \frac{1}{3 X_n^2}$$

と因数分解できる。従って、 $o(3)$ のオーダーで収束する。

2) 一般の n 次方程式の場合

n 次方程式 $f(X) = 0$ の根に $o(m)$ のオーダーで収束する漸化式を求める手順を示す。

補助多項式 $g(X), h(X)$ を以下のように定義する。

$$g(X) = (X - A)^m h(X) \quad \dots \text{式(1)}$$

$$h(X) = \sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{n-2-k} A^k \quad \dots \text{式(2)}$$

ただし、 A は $f(X) = 0$ の根、 $C_{n-2} = 1$ とする。

$h(X)$ は、 X の $(n-2)$ 次の多項式とする。

補足： $h(X)$ は、手順3で A^k を消去するために必要な数のパラメタを
 供えていることが要件である。

手順1 $g(X)$ を展開して整理すると、 A についての $(n+m-2)$ 次の多項式が得られる。

手順2 この多項式を、 $f(A) = 0$ を使って、 A の n 次以上の項を消去する。

こうして得られた多項式を以下のように表記する。

$$g(X) = \sum_{k=0}^{n-1} D_k A^k \quad \dots \text{式(3)}$$

ただし、 D_k は、 C_i, X^j の多項式

手順3 A^k ($k = 2 \sim n-1$) の係数が0となるように C_i を決定する。

この処理によって、 $g(X)$ は A に関する一次式となる。

手順4 手順3で決定した C_i を式(3)に代入して整理すると

$$g(X) = E_1 A + E_0 \quad \dots \text{式(4)}$$

が得られる。 E_0, E_1 には X^j の項が含まれるが、 A に関しては1次式である。

手順5 X が方程式の根 A に近ければ、 $g(X) \sim 0$ となるので、

$$A \sim -\frac{E_1}{E_0} \quad \dots \text{式(5)}$$

となる。式(5)において、 $A \rightarrow X_{n+1}, X \rightarrow X_n$ とすれば求める漸化式が得られる。

こうして得られた漸化式が $o(m)$ のオーダーで根 A に収束するのは明らかであろう。

なお、手順1～手順5の具体的な例は、1)で示した通りである。

事例1 平方根($f(X) = X^2 - a$)の場合、 $h(X)$ は0次の多項式($n-2=0$:定数)となる。よって、

$g(X) = (X - A)^m$ となる。 $m=3$ とすると、問題3の【考察】で示す漸化式を得る。

また、 $h(X)$ が定数であるため、更に高次の漸化式も簡単に求めることができる。

ex. $m = 4$ の場合 (o(4) の漸化式)

$$X_{n+1} = \frac{X_n^4 + 6aX_n^2 + a^2}{4X_n^3 + 4aX_n}$$

事例 2 立方根 ($f(X) = X^3 - a$) の場合、 $h(X)$ は 1 次多項式 ($n-2 = 1$) となる。よって、

$\mathbf{g(X) = (X - A)^m (cX + A)}$ となる。 $m = 3$ とすると、 $c=1$ が得られ、問題 3 の【考察 2】
で示す漸化式となる。

以上